



**LISBOA  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT**

**MESTRADO**

**FINANÇAS**

**TRABALHO FINAL DE MESTRADO**

**DISSERTAÇÃO**

**A EFICIÊNCIA NAS CARTEIRAS MARKOWITZ, VARIÂNCIA MÍNIMA E  
NAÏVE APLICADA AO ÍNDICE AEX - 25**

**DAVID JOÃO DE AREDE NUNES**

**ORIENTAÇÃO: DOUTOR EDUARDO BARBOSA DO COUTO**

**JÚRI:**

**PRESIDENTE: DOUTORA MARIA TERESA GARCIA**

**VOGAIS: DOUTOR EDUARDO BARBOSA DO COUTO  
MESTRE TIAGO ANDRADE DIOGO**

**SETEMBRO - 2013**



**LISBOA  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT**

**MESTRADO**

**FINANÇAS**

**TRABALHO FINAL DE MESTRADO**

**DISSERTAÇÃO**

**A EFICIÊNCIA NAS CARTEIRAS MARKOWITZ, VARIÂNCIA MÍNIMA E  
NAÏVE APLICADA AO ÍNDICE AEX - 25**

**DAVID JOÃO DE AREDE NUNES**

**ORIENTAÇÃO:**

**DOUTOR EDUARDO BARBOSA DO COUTO**

**SETEMBRO - 2013**

# A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

# A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

## Resumo

Este estudo tem como finalidade analisar vários modelos de gestão de carteiras, que estão na base da gestão activa e passiva e qual o impacto dos mesmos na escolha eficiente de uma carteira óptima constituída por títulos que fazem parte do principal índice accionista Holandês – AEX 25. A análise histórica das carteiras teve em conta o modelo de Markowitz (média-variância), o modelo de Variância Mínima e o modelo Naïve (pesos iguais). O horizonte temporal utilizado nesta dissertação foi de 10 anos e considera o período entre Janeiro de 2002 e Dezembro de 2012. Os dados foram obtidos da base de dados académica *Datastream*, de onde se extraíram os preços de fecho dos títulos utilizados.

Os pesos a investir em cada activo, foram calculados mensalmente e para tal foi utilizado o método da “janelas de dados” a 1 e 2 anos.

As conclusões apontam que para o horizonte temporal de 12 meses não se observa grande diferença entre os vários modelos estudados na tese. No entanto, podemos considerar que para mais rendibilidade e maior Índice de Sharpe a carteira óptima foi aquela que se apresentou como melhor opção.

**Palavras-chave:** Carteira de Markowitz; Carteira de Mínima Variância; Carteira Naïve; Índice de Sharpe.

# A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

## Abstract

The main point of this study is to analyse some models underlying the active and passive portfolio management and what would be its impact on the efficient choice of a certain optimal portfolio constituted by stocks which are integrated in Dutch reference index - AEX-25. For the historical analysis were considered two of the principal models used in this type of management, the mean-variance model of Markowitz the minimum variance and naïve (homogeneous weights) models. We are considering, in this thesis, a 10-year investment horizon which will mediate in between January 2002 and December 2002. The data were obtained with *Datastream*, an academic data-base, where we could extract the closing price of the securities used.

To determine that aforementioned weight we'll use the "window system" for 1 up to 2 years.

To conclude, we will be able to see that for 12 months there are no significant differences between the types of portfolio management treated throughout the dissertation. Moreover, we may consider that for higher returns and sharp ratio, the optimal portfolio is the best option.

**Key-words:** Markowitz Portfolio Theory; Minimum-Variance Portfolio; Naïve Portfolio; Sharpe Index.

# A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

## Índice

1. Introdução .....	1
1.1 Considerações sobre o tema .....	1
1.2 Objectivo .....	2
1.3 Estrutura da Tese .....	3
2 Revisão de Literatura.....	3
2.1 A Teoria da Carteira Óptima e a abordagem de Markowitz.....	4
2.2 Carteira de Variância Mínima e Carteira Naïve .....	13
2.3 Comparando duas formas de Gestão de Carteiras: Activa e Passiva .....	14
2.4 Avaliação da Performance: o Índice de Sharpe.....	15
2.5 Conclusões da Revisão de Literatura.....	16
3 Hipóteses a testar .....	17
4 Metodologia e Dados.....	20
5 Resultados.....	25
5.1 Carteiras em análise - Resultados .....	25
5.2 Resultados dos Testes de Hipóteses .....	28
5.2.1 Teste de Normalidade.....	28
5.2.2 Teste de Hipóteses .....	29
6 Conclusões, limitações e tópicos de Investigação futura .....	31
6.1 Principais Conclusões.....	31
6.2 Limitações do estudo .....	33
6.3 Tópicos para futuras investigações.....	33
7 Referências Bibliográficas.....	35
8 ANEXOS .....	IX

# A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

## Lista de Figuras

<b>FIGURA 1 – COMPARAÇÃO DAS RENDIBILIDADES DO ÍNDICE AEX 25 E EURO STOXX 50 ENTRE 2002 E 2012.....</b>	<b>25</b>
<b>FIGURA 2 - RENDIBILIDADE DA CARTEIRA DE MARKOWITZ COM JANELA DE DADOS A 1 ANO .....</b>	<b>X</b>
<b>FIGURA 3 - ÍNDICE DE SHARPE DA CARTEIRA MARKOWITZ COM JANELA DE DADOS A 1 ANO .....</b>	<b>X</b>
<b>FIGURA 4- RENDIBILIDADE DA CARTEIRA DE VARIÂNCIA MÍNIMA COM JANELA DE DADOS A 1 ANO .....</b>	<b>XI</b>
<b>FIGURA 5- ÍNDICE DE SHARPE DA CARTEIRA VARIÂNCIA MÍNIMA COM JANELA DE DADOS A 1 ANO .....</b>	<b>XI</b>
<b>FIGURA 6- RENDIBILIDADE DA CARTEIRA DE NAÏVE COM JANELA DE DADOS A 1 ANO....</b>	<b>XI</b>
<b>FIGURA 7- ÍNDICE DE SHARPE DA CARTEIRA NAÏVE COM JANELA DE DADOS A 1 ANO....</b>	<b>XII</b>
<b>FIGURA 8 - COMPARAÇÃO DAS RENDIBILIDADES DAS VÁRIAS CARTEIRAS PARA JANELA DE DADOS A 1 ANO.....</b>	<b>XII</b>
<b>FIGURA 9 - COMPARAÇÃO DO ÍNDICE DE SHARPE DAS VÁRIAS CARTEIRAS PARA JANELA DE DADOS A 1 ANO.....</b>	<b>XII</b>
<b>FIGURA 10 - RENDIBILIDADE DA CARTEIRA DE MARKOWITZ COM JANELA DE DADOS A 2 ANOS.....</b>	<b>XIII</b>
<b>FIGURA 11 - ÍNDICE DE SHARPE DA CARTEIRA MARKOWITZ COM JANELA DE DADOS A 1 ANO .....</b>	<b>XIII</b>
<b>FIGURA 12 - RENDIBILIDADE DA CARTEIRA DE VARIÂNCIA MÍNIMA COM JANELA DE DADOS A 2 ANOS .....</b>	<b>XIII</b>

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

<b>FIGURA 13</b> - ÍNDICE DE SHARPE DA CARTEIRA VARIÂNCIA MÍNIMA COM JANELA DE DADOS A 2 ANOS .....	XIV
<b>FIGURA 14</b> - RENDIBILIDADE DA CARTEIRA DE NAÏVE COM JANELA DE DADOS A 2 ANOS .....	XIV
<b>FIGURA 15</b> - ÍNDICE DE SHARPE DA CARTEIRA MARKOWITZ COM JANELA DE DADOS A 2 ANOS.....	XIV
<b>FIGURA 16</b> - COMPARAÇÃO DAS RENDIBILIDADES DAS VÁRIAS CARTEIRAS PARA JANELA DE DADOS A 2 ANOS .....	XV
<b>FIGURA 17</b> - COMPARAÇÃO DO ÍNDICE DE SHARPE DAS VÁRIAS CARTEIRAS PARA JANELA DE DADOS A 2 ANOS .....	XV



# A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

## Lista de Tabelas

<b>TABELA 1 -</b> TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV	28
<b>TABELA 2 -</b> TESTE DE HIPÓTESE ANO COM JANELA DE DADOS A 1 ANO MARKOWITZ VS VARIÂNCIA MÍNIMA A 12 MESES	29
<b>TABELA 3 -</b> TESTE DE HIPÓTESE ANO COM JANELA DE DADOS A 2 ANOS MARKOWITZ VS VARIÂNCIA MÍNIMA A 12 MESES	30
<b>TABELA 4 -</b> TESTE DE HIPÓTESE ANO COM JANELA DE DADOS A 1 ANO MARKOWITZ VS NAÏVE A 12 MESES	IX
<b>TABELA 5 -</b> TESTE DE HIPÓTESE ANO COM JANELA DE DADOS A 1 ANO MÍNIMA VARIÂNCIA VS NAÏVE A 12 MESES	IX
<b>TABELA 6 -</b> TESTE DE HIPÓTESE ANO COM JANELA DE DADOS A 2 ANOS MARKOWITZ VS NAÏVE	IX
<b>TABELA 7 -</b> TESTE DE HIPÓTESE ANO COM JANELA DE DADOS A 2 ANOS MÍNIMA VARIÂNCIA VS NAÏVE	X

## **Agradecimentos**

A elaboração de uma dissertação é um processo que requer uma grande dose de espírito de sacrifício, muitas horas de trabalho e acima de tudo muita concentração. Agora que o meu estudo está concretizado é hora de agradecer aos que me apoiaram durante este período de árduo trabalho.

Agradeço:

- Ao Professor Eduardo Couto por toda a ajuda que me deu, por fomentar a discussão de ideias em relação ao tema estudado e por me ter incentivado até ao último minuto.
- Aos meus pais tios e avós, um agradecimento especial para o meu avô Narciso que não teve tempo de ver a tese terminada mas que certamente está orgulhoso de mim.
- Aos meus irmãos Filipe Daniel e Ana Margarida que têm contribuído, de forma clara, para que eu todos os dias seja uma pessoa melhor.
- À minha namorada, Maria Inês Trindade Santos, por todos os ensinamentos que me tem dado ao longo do nosso tempo de namoro, por não me deixar desistir e por me ouvir sempre. Todas as palavras são insuficientes para descrever o quão agradecido lhe estou.

Muito Obrigado!

## **1. Introdução**

### ***1.1 Considerações sobre o tema***

O tema da presente dissertação surge no seguimento do extenso debate sobre os diversos tipos de carteiras compostas por activos financeiros. O foque desta tese baseia-se na gestão de carteiras. As opiniões, sobre qual o tipo de gestão de carteiras mais adequado ao investimento em activos financeiros, dividem-se entre os autores e investigadores que defendem a gestão de carteiras de forma activa e aqueles que, por outro lado, defendem a gestão de carteiras de forma passiva. Este estudo visa avaliar o comportamento histórico, em termos de Rendibilidade, Risco e Índice de Sharpe, dos vários modelos de gestão de carteiras, aplicados às empresas que compõem o índice Holandês AEX – 25. Esta análise tem também como objectivo ajudar a perceber os efeitos dos modelos numa óptica de gestão activa e passiva.

A escolha do índice holandês prende-se com o facto do mesmo ser uma das principais referências bolsitas em termos europeus e da economia holandesa ser uma das mais importantes economias da Europa. Outro motivo que levou à escolha do mercado holandês está relacionada com a recente mobilização das sedes de várias empresas, entre as quais algumas das maiores empresas portuguesas de retalho, para a Holanda fruto das crescentes oportunidades que este país tem proporcionado por exemplo, em termos de impostos.

A gestão activa tem por base a carteira óptima que surge com Harry Markowitz (1952) e a carteira de variância mínima. A discussão em torno da carteira óptima introduz o

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

conceito de fronteira eficiente que será abordado neste estudo. A carteira de variância mínima coloca o retorno em segundo plano e preocupa-se exclusivamente com a minimização do risco associado ao investimento em activos financeiros.

A carteira que está por trás da gestão passiva é a carteira naïve, também conhecida por carteira de ponderações iguais. Esta carteira além de, como atrás referido, ser uma carteira cujos títulos são ponderados de forma igual é uma carteira de activos que não sofre alterações, nem é revista ao longo do tempo em função da evolução do mercado.

Na avaliação dos vários modelos de gestão de carteiras será também tido em conta a performance dos investimentos avaliada segundo o Índice de Sharpe.

Assim e numa altura em que, aparentemente, observamos uma mudança de tendência dos mercados financeiros com especial destaque para o mercado accionista e em que vemos os principais índices mundiais a baterem máximos históricos é importante entender o funcionamento dos diversos modelos ajudando os investidores particulares e de fundos de investimento, na gestão das suas carteiras e no ajustamento de estratégia ao momento económico vivido.

### ***1.2 Objectivo***

O objectivo desta dissertação será o de analisar os modelos de Markowitz, variância mínima e naïve e qual será o impacto dos mesmos, na escolha de uma carteira constituída por acções pertencentes ao índice AEX 25 – principal índice do mercado accionista Holandês. Esta análise será feita através da observação de dados históricos

# A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

(10 anos) do índice considerando para tal o desempenho das carteiras geridas de várias formas.

De referir, que para esta análise serão tidas em consideração as variáveis que afectam a forma da fronteira eficiente e subsequentemente a *performance* ou desempenho das carteiras de investimento que têm por base títulos do mercado holandês.

## ***1.3 Estrutura da Tese***

O presente estudo começa com a introdução ao tema em análise. De seguida é apresentada a revisão de literatura, resultado de um trabalho de pesquisa e análise sobre outros estudos e publicações anteriormente realizados. A revisão de literatura divide-se em quatro temas nucleares: a teoria da carteira óptima e a abordagem de Markowitz, as carteiras de variância mínima e naïve, comparação entre gestão activa e gestão passiva e por fim o Índice de Sharpe. No terceiro capítulo serão apresentadas as hipóteses a testar, sendo os dados apresentados e a metodologia discutida no capítulo quatro. O quinto capítulo foca-se nos resultados obtidos e no sexto e último capítulo são expostas as conclusões e limitações que advém do estudo assim como, são sugeridos tópicos para futuras investigações sobre o tema em análise.

## **2. Revisão de Literatura**

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

No presente capítulo iremos proceder à revisão de literatura que está directa ou indirectamente relacionada com o tema da dissertação, tentando não só enquadrar o mesmo em termos teóricos, mas também analisar a metodologia utilizada pelos principais autores e respectivos resultados e conclusões dos seus trabalhos empíricos.

### ***2.1 A Teoria da Carteira Óptima e a abordagem de Markowitz***

A Teoria da Carteira Óptima toma forma, em 1952, através de Harry Markowitz num artigo intitulado de *Portfolio Selection*. Markowitz (1952) realça a importância que o investidor deve dar à diversificação e à maximização da carteira de investimento. O mesmo, no que diz respeito à constituição da Carteira Óptima, divide a sua análise em duas etapas de relevante importância. A primeira inicia-se com a observação e experiência e termina com a expectativa em relação ao desempenho futuro dos títulos que pertencem à carteira de investimento. Já a segunda etapa, começa com a expectativa em relação ao desempenho futuro dos títulos e termina com a escolha da carteira de investimento. É neste segundo estágio que Markowitz coloca toda a sua atenção. Para calcular as proporções a investir em cada activo, considerando para tal as expectativas dos investidores, o autor decide desenvolver o modelo média-variância. Este modelo foi, primeiramente, aplicado a funções de utilidade quadráticas e foi utilizado em investidores avessos ao risco, sendo numa fase mais avançada, aplicado a funções de maior complexidade e a investidores amantes e neutros do risco.

O modelo de Markowitz é apontado, pela literatura, como sendo um dos modelos a seguir no que respeita à selecção de carteiras de investimento – considerando carteiras cujo comportamento dos retornos siga uma distribuição normal – para indivíduos avessos ao risco. No seguimento desta corrente de pensamento, Bawa (1976) testou o

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

modelo média-variância de Markowitz aplicando-o a funções de utilidade monótonas com um comportamento crescente e a indivíduos avessos, amantes e neutros ao risco, chegando à conclusão que este modelo é aplicável a todos os investidores com a condição de que a carteira inclua um activo com maior retorno e maior volatilidade.

Nesta investigação, o autor elucida-nos, também, sobre o conceito de fronteira eficiente<sup>1</sup>, explicando que os investidores podem escolher – entre um conjunto de carteiras – a carteira óptima, que será aquela que conjuga o melhor resultado do binómio risco-rendibilidade, ou seja, o investidor vai escolher para certo nível de rendibilidade as carteiras que apresentam o nível mais baixo de risco.

Daqui subjaz a ideia de que para o investidor obter mais rendibilidade terá, obrigatoriamente, de correr mais risco. Markowitz evidencia o facto da formação da fronteira eficiente ser afectada pela existência de vendas a descoberto (*short-selling*), que vão fazer com que haja uma expansão da mesma resultando, desta forma, um aumento das possibilidades de combinar novas carteiras de investimento, alargando, assim, as hipóteses de investimento. Contudo podemos considerar, tendo em conta Elton *et al.* (2011), que as vendas a descoberto não vão ter um grande impacto nos dias de hoje uma vez que, além de não serem permitidas em grande parte do mundo financeiro, não são utilizadas pela maioria dos investidores modernos como forma de financiamento.

---

<sup>1</sup> O conceito de fronteira eficiente é introduzido em 1952 por Harry Markowitz, esta também é conhecida por fronteira de Markowitz.

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

Para além do *short-selling* existem outros factores que podem influenciar a forma da fronteira eficiente. Ademais, Pogue (1970) identifica os custos de liquidez, as políticas de financiamento, os custos associados às transacções e os impostos, entre outros, como sendo alguns dos factores que influenciam de forma categórica a constituição da fronteira eficiente. Pogue (1970) teve por objectivo observar de que maneira é afectada a forma da fronteira eficiente, concluindo que, no que respeita aos custos associados às transacções, a mesma se vai retrair movendo-se para níveis mais baixos de rendibilidade. Ao contrário se o investidor recorrer a endividamento e forem permitidas vendas a descoberto haverá uma expansão da fronteira eficiente, ou seja, haverá uma deslocação da mesma para níveis mais elevados de rendibilidade. Pode-se inferir da conclusão anterior que uma carteira de investimento, onde é permitido o *short-selling* e o endividamento, origina uma fronteira eficiente que domina a resultante de uma carteira de investimento que, somente, considera os custos associados às transacções.

Rubinstein (2002) refere-se ao artigo de Markowitz (1952) como sendo o momento em que nasce a economia financeira moderna, mencionando a ideia de Markowitz (1952) quando este refere que a diversificação pode ser um meio de reduzir o risco, mas não eliminá-lo totalmente, isto quando temos em conta um conjunto de títulos e não um só título individualmente. Segundo o autor, o princípio fundamental na obra de Markowitz foi provar que, numa carteira de investimento, o factor mais importante para o investidor não é o risco individual de cada título - que pode ser facilmente reduzido ou até mesmo eliminado através da diversificação – mas o contributo desse risco individual para o risco total da carteira de investimento, tendo em conta que este contributo está



## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

relacionado com a covariância entre os diversos títulos que compõem a carteira de investimento.

Ainda sobre diversificação, deve realçar-se o trabalho levado a cabo por Gaumnitz (1969), num estudo onde o autor avalia qual deve ser o número óptimo de títulos a deter numa carteira de investimento para que se consiga diversificar a mesma. O autor analisa a hipótese em que a adição de mais um título na carteira de investimento, não gerará qualquer impacto, ou a gerar algum este seja muito próximo de zero, no que respeita à rendibilidade e risco. Querendo isto dizer, por outras palavras, que em termos de diversificação quando se detém um certo número de títulos, a introdução de mais um título na carteira de investimento não trará qualquer benefício para o investidor ou, no caso de trazer algum benefício esse seja quase nulo, não tendo assim qualquer impacto significativo na carteira de investimento.

Para provar o acima apresentado, usando como referência o índice *Standard and Poor's 425 Industrials* e tendo como base para o estudo a análise dos fundos mútuos, foram analisadas diversas carteiras geradas a partir de uma ferramenta estatística conhecida por ANOVA (*Analisis of Variance*), assim como outros testes estatísticos. Concluiu-se que o número óptimo de acções a deter numa carteira de investimentos, para esta estar bem diversificada, seria até 20 títulos. O autor conclui, também, que uma carteira que tenha na sua composição entre 6 a 11 títulos parece apresentar, em média, bons resultados em termos de *performance* quando comparada com outros fundos de investimento compostos por acções.

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

Statman (1987) aborda também a temática da diversificação apresentando conclusões acerca do número de títulos a deter numa carteira de investimento para que esta seja considerada diversificada. Esse estudo teve como fim dois propósitos: o de mostrar que para a carteira de investimento estar bem diversificada não seria necessário possuir, aproximadamente, mais do que 30 títulos e o segundo foi o de comparar as conclusões, por si, alcançadas com as conclusões apresentadas noutros estudos sobre o tema em análise – diversificação da carteira de investimento. O autor concluiu que a volatilidade média de uma carteira de investimento composta apenas por um activo, era de 49,2%, sendo que esta volatilidade diminuía aquando do aumento do número de títulos presentes na carteira de investimento. Statman (1987) concluiu também que esta volatilidade só poderia baixar, ou seja, ser reduzida até aos 19,2%, observando-se neste caso uma redução do risco da carteira na ordem dos 39,024%, face ao risco inicial. Neste estudo o autor releva também a ideia de que a diversificação deve aumentar apenas até níveis em que os benefícios marginais, da mesma, sejam superiores aos custos marginais, ou seja, o investidor deve continuar a comprar títulos, com o intuito de diversificar a sua carteira, até ao ponto em que os custos de tal não ultrapassem os ganhos, notando que, como é referido, no mesmo estudo, os custos marginais crescem mais depressa que os benefícios marginais subjacentes à diversificação.

Statman (2004) volta a rebater o tema atrás explanado, sendo que desta vez aborda e compara duas teorias - a saber: a teoria baseada no modelo média-variância e a teoria da carteira comportamental (*Behavioral Portfolio Theory*), apresentada por Shefrin e Statman (2000) - sendo que a grande diferença entre as duas se prende com o facto do modelo média-variância defender que a redução do risco é sempre um benefício

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

enquanto, para a teoria da carteira comportamental a redução do risco não é sempre benéfica.

Baule (2010) aborda a escolha da carteira óptima por parte dos pequenos investidores, considerando o risco e os custos de transacção. O autor refere que a teoria clássica da selecção da carteira óptima apresenta algumas dificuldades para os pequenos investidores devido aos custos de transacção subjacentes, a que estes estão sujeitos, por exemplo os custos de corretagem. O autor refere também, que estudos empíricos mostram que, para os investidores que têm menores volumes de investimento, os custos de transacção superam os custos de risco fazendo com que as carteiras óptimas tenham na sua constituição um número muito menor de títulos. Devido ao que atrás foi dito, estes mesmos investidores têm menos hipóteses de diversificar a sua carteira – de notar que a teoria clássica da selecção do portfólio, sugere que os investidores diversifiquem a sua carteira de investimento – pois são limitados pelos custos de transacção que têm de suportar. O autor, no entanto, refere que a indústria financeira já oferece um conjunto de produtos que permitem diversificar a carteira sem que os pequenos investidores tenham os elevados custos de transacção que atrás foram referidos. Alguns desses produtos são os fundos mútuos ou os *index certificates*.

Partindo, novamente, de Markowitz (1952) é importante analisar o trabalho publicado por Horasanli e Fidan (2007), onde estes referem que o modelo média-variância está desfasado da realidade actual do mercado. Neste sentido, é apresentada uma solução, que passa pela utilização de duas ferramentas estatísticas – EWMA<sup>2</sup> e GARCH<sup>3</sup>, para

---

<sup>2</sup> *Exponentially Weighted Moving Average*

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

lidar com a estrutura dinâmica apresentada pela volatilidade do mercado. Para a realização deste estudo, foi tida em conta a observação de 15 acções presentes no Istanbul Stock Exchange (XU3O índice), no período compreendido entre 09/08/2005 e 30/12/2005 tendo-se concluído que para o mesmo nível de retorno esperado podemos sempre obter menos risco usando matrizes de covariâncias ponderadas exponencialmente.

Devemos considerar também, para melhor compreensão do tema da dissertação, o modelo apresentado por Polson e Tew (2000) que consiste na observação dos dados históricos de um grupo de títulos pertencentes ao índice americano S&P500 entre 1970 e 1996 e compara o seu desempenho com o do *Benchmark* – o próprio índice – chegando à conclusão de que o modelo utilizado tem um comportamento bastante satisfatório pois obtém um melhor desempenho face ao seu *Benchmark*. De notar que a metodologia utilizada pelos autores difere, em grande medida, da usual metodologia baseada nas utilidades quadráticas.

Outros factores que influenciam a escolha da carteira óptima por parte do investidor são: o factor tempo, que se baseia no horizonte temporal durante o qual o investidor detém os títulos em carteira, e todos os factores inesperados e não controláveis que podem afectar o comportamento dos mercados e subsequentemente o desempenho dos títulos em carteira, como por exemplo momentos em que as bolsas registam períodos acentuados de queda ou de subida, ou seja, períodos em que se verificam máximos ou mínimos históricos de preços dos títulos.

---

<sup>3</sup> *Generalized Auto Regressive Conditional Heteroscedasticity*

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

O factor que se baseia no horizonte temporal do investimento, como atrás referido, pode influenciar a constituição da carteira óptima. Gunthorpe e Levy (1994) abordam esta temática de forma clara, referindo que quando os retornos são dependentes e não estacionários pode-se assumir que o horizonte temporal – ou seja, o período durante o qual um investidor detém os títulos – vai afectar a constituição da carteira óptima. Para aferir sobre a consistência desta ideia, devemos referenciar o estudo levado a cabo por Gunthorpe e Levy (1994) que teve em consideração três categorias de títulos, cinco acções defensivas ( $\beta < 1$ ), cinco acções agressivas ( $\beta > 1$ ) e cinco acções neutras ( $\beta = 1$ ) e que se baseou nos dados, diários e mensais, extraídos do *Center for Research in Security Prices* (CRSP) para o período compreendido entre Janeiro de 1963 e Dezembro de 1990. Utilizando o modelo média-variância e observando seis períodos de horizontes temporais de investimento – diário, semanal, mensal, trimestral, semestral e anual – os autores concluíram que a constituição da carteira óptima varia consoante o horizonte temporal dos dados em análise e que o modelo utilizado, para o cálculo das proporções de activos a investir, nos dá uma excelente aproximação quando consideramos investimentos com um horizonte temporal de um ano ou menos.

O segundo factor, atrás mencionado, que pode impactar a escolha da carteira óptima por parte do investidor é o factor gerado por acontecimentos inesperados e não controláveis. Chow *et al.* (1999) sugerem, que não seja utilizado só o peso do tempo, enquanto medida associada ao risco de deter os títulos em carteira, mas também os eventos que ocorreram durante esse período de tempo, pois há eventos, que por determinadas razões, podem ter mais impacto no desempenho dos títulos – em termos de retorno – do que

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

outros e o facto de só se usar a medida tempo, não tendo em conta o que aconteceu durante esse tempo, fará com que as conclusões que daí resultam sejam, de certa forma, enviesadas.

O objectivo subjacente a este estudo passa por perceber de que forma a constituição da carteira óptima é afectada pelos eventos ocorridos ao longo do tempo em análise. Para tal os autores analisaram os acontecimentos que, ocasionalmente ocorrem nos mercados e que originam *outliers* que afectam a performance dos títulos (em termos de rendibilidades, variâncias e covariâncias). Assim os autores identificaram um conjunto de *outliers* e agruparam-nos numa matriz de variâncias e covariâncias, sendo essa matriz adicionada à anterior e formando-se, desta forma, uma carteira óptima mais robusta perante momentos inesperados de instabilidade dos mercados. Para o estudo empírico foram tomados em conta dados relativos aos retornos de 8 classes de activos durante o período compreendido entre Janeiro de 1988 e Setembro de 1998, a partir dos mesmos formaram-se 3 carteiras, uma com a amostra total de 129 meses, a segunda com uma amostra dos *outliers* (27 meses) e a terceira carteira foi formada através da combinação das matrizes que compuseram as duas carteiras anteriores. Posteriormente foi feita uma comparação entre as carteiras, tendo em conta períodos estáveis e instáveis dos mercados, tendo os autores concluído que se a carteira óptima tiver presente na sua constituição os *outliers*, é mais conservadora - ou seja, terá na sua constituição títulos que estejam menos expostos aos mercados - e apresenta menos risco em períodos instáveis dos mercados relativamente à carteira que tem em conta os 129 meses. Importa, no entanto, relevar o facto de os autores sugerirem como solução ideal um mix entre as duas matrizes de variâncias e covariâncias.

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

Para a escolha do portfolio óptimo, seja qual for o modelo utilizado, deve ter-se presente que a escolha dos inputs – rendibilidades, variâncias e covariâncias – é fundamental para que o sucesso do estudo não seja colocado em causa.

### ***2.2 Carteira de Variância Mínima e Carteira Naïve***

Será fundamental para a compreensão do tema em análise, fazer referência a outros dois modelos que podem ser utilizados, como base, para a construção de carteiras óptimas: o modelo da variância mínima e o modelo naïve.

O modelo de variância mínima é, como o nome indica, o modelo que apresenta a menor variância e é um dos modelos comumente referenciados pela literatura que estuda o tema em análise. Este, não é nada mais do que um caso específico da carteira óptima de Markowitz, constituído por títulos com risco que apresentam uma variância menor face à carteira média-variância.

Clarke *et al.* (2006) referem que a principal característica da carteira de variância mínima é o facto dos pesos dos títulos que constituem a carteira serem independentes dos retornos esperados subjacentes a esses mesmos títulos. Os mesmos autores referem que enquanto os portfólios que estão na fronteira eficiente são concebidos para minimizar o risco para determinado retorno, a carteira de variância mínima minimiza o risco, como mencionado anteriormente, independentemente do retorno esperado.

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

Alguns autores argumentam, que a escolha do modelo a seguir para a construção da carteira óptima deve passar apenas pelo modelo de variância mínima. Num estudo levado a cabo por Jorion (1986) o autor chegou à conclusão que em relação aos pesos a investir em cada activo, estes ajustam-se aqueles que se atingem aquando da construção da carteira com base no modelo de variância mínima.

Como vem sendo referido ao longo da tese, os parâmetros utilizados para a construção da carteira óptima e o impacto dos erros de estimação – provocado pela incerteza associada às rendibilidades esperadas – pode ser colmatado utilizando o modelo de variância mínima porque não tem em conta, essas mesmas rendibilidades esperadas para o cálculo dos pesos a investir na composição da carteira óptima.

Um outro modelo também muito utilizado para a construção de carteiras óptimas é a carteira naïve. Esta carteira é também conhecida como a carteira de pesos iguais ( $1/N$ ) e baseia-se na utilização de pesos iguais para os activos que constituem a carteira de investimento, ou seja, no caso de se ter uma carteira composta por 4 títulos, o peso que cada título terá na carteira será de 25%, ( $1/N$ ).

### ***2.3 Comparando duas formas de Gestão de Carteiras: Activa e Passiva***

Será importante referir que os três modelos sobre os quais tem incidido o conteúdo da dissertação, estão inseridos em duas formas distintas de gestão de carteiras. São elas a Gestão Activa e a Gestão Passiva.

A Gestão Passiva é, segundo os autores Elton *et al.* (2011), um tipo de gestão de carteiras que utiliza um *benchmark* (índice de referência) para ponderar os pesos a



## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

investir em cada activo, ou seja, é utilizada a ponderação que o título tem no índice de referência e aplica-se, essa mesma ponderação, na construção do portfolio óptimo. Assim, este tipo de Gestão tende a acompanhar o desempenho do índice de referência e por vezes até supera, em termos de ganhos, a Gestão Activa.

A Gestão Activa tem um posicionamento diferente daquele que acontece com a Gestão Passiva, que basicamente se limita a seguir o comportamento do índice de referência. Os investidores que seguem o tipo de gestão activa querem tentar bater, em termos de rendibilidades atingidas, os índices de referência. Tendo em conta Elton *et al.* (2011), prevê-se que o debate entre a melhor forma de gestão de carteiras vai continuar e que haverá sempre defensores, destes dois tipos de gestão, de ambos os lados.

### ***2.4 Avaliação da Performance: o Índice de Sharpe***

Elton *et al.* (2011) referem que é extremamente importante avaliar a tomada de decisão por parte do investidor. Para avaliarmos a *performance* de uma carteira podemos, entre outros métodos, comparar a rendibilidade da carteira por nós escolhida com a rendibilidade de outras carteiras, sempre tendo como ponto de partida um mesmo nível de risco e restrições. Existem algumas formas de avaliação da *performance* de carteiras, destacando-se o Índice de Sharpe, que será alvo de atenção durante toda a dissertação. O Índice de Sharpe consiste no rácio que resulta da subtracção entre a rendibilidade da carteira e a rendibilidade do activo sem risco, pelo desvio padrão da mesma. Fazendo a leitura deste rácio temos, por cada unidade adicional de risco incorrido, o prémio que o investidor obtém pelo risco assumido.

## ***2.5 Conclusões da Revisão de Literatura***

A Gestão Activa e a Gestão Passiva fazem parte de um tema objecto de muitos estudos e reflexões ao longo do tempo. De Miguel *et al.* (2009) são alguns dos autores que têm estudado a Gestão Activa de investimentos em acções. Kritzman *et al.* (2010) são alguns dos apoiantes da vertente de Gestão Passiva. Chow *et al.* (1999) sugerem que para uma melhor análise e definição dos títulos a deter numa carteira de investimento, se deverá ter em conta os eventos que ocorreram durante os intervalos de tempo escolhidos para os estudos em análise e não só o horizonte temporal.

Para se avaliar a performance das carteiras, optou-se pela escolha do Índice de Sharpe, onde foram consideradas as variáveis rendibilidade e risco. No entanto, este não é a única forma de avaliar o desempenho de uma carteira. Ao longo dos tempos foram feitas (bastantes) referências e foram publicados imensos estudos referentes a outros métodos de avaliação de performance como, por exemplo, o rácio de Treynor (1966) e *alpha* de Jensen (1968).

Gaumnitz (1969) é um dos autores que aborda esta questão e conclui que a partir de um determinado número de títulos, a dição de mais um título não originará nenhum benefício em termos de diversificação, sendo que a mesma é fundamental para reduzir eventuais perdas a que os investidores podem estar sujeitos. De Miguel *et al.* (2009) referem que o número de títulos que a carteira de investimento deve ter para que seja considerada uma carteira diversificada e menos exposta ao risco.

### 3. Hipóteses a testar

No seguimento dos objectivos da elaboração desta dissertação, e tendo em conta os resultados e respectivas conclusões da revisão de literatura importa referir que o estudo em causa se debruçará sobre dois tipos de hipóteses: uma tendo por base a rendibilidade outra tendo por base o Índice de Sharpe. As hipóteses a testar serão utilizadas com base nos dois horizontes temporais utilizados nesta dissertação – 12 meses. Importa referir que não serão considerados os custos de intermediação financeira e será tido em conta a utilização de janelas de dados a 1 e 2 anos.

As hipóteses gerais a estudar são:

H1: As taxas de rendibilidade de uma carteira gerida segundo os modelos média-variância e variância mínima são, em média, estatisticamente iguais às taxas de rendibilidade de uma carteira naïve.

H2: A performance, tendo por base o Índice de Sharpe, de uma carteira gerida tendo em conta os modelos média-variância e variância mínima é, em média estatisticamente igual à performance, tendo por base o Índice de Sharpe, de uma carteira naïve.

As hipóteses específicas a estudar são:

HA: A taxa mensal, anualizada, de rendibilidade de uma carteira óptima ( $R_A$ ) é estatisticamente igual à taxa mensal, anualizada, de rendibilidade de uma carteira Naïve (pesos iguais) gerida de forma passiva ( $R_B$ ).

HB: A taxa mensal, anualizada, de rendibilidade de uma carteira óptima ( $R_A$ ) é estatisticamente igual à taxa mensal, anualizada, de rendibilidade de uma carteira de Mínima Variância ( $R_C$ ).

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

HC: A taxa mensal, anualizada, de rentabilidade de uma carteira ótima ( $R_A$ ) é estatisticamente igual à taxa mensal, anualizada, de rentabilidade do Índice de Mercado (AEX-25) ( $R_D$ ).

HD: A taxa mensal, anualizada, de rentabilidade de uma carteira Naïve ( $R_B$ ) é estatisticamente igual à taxa mensal, anualizada de uma carteira de Variância Mínima ( $R_C$ ).

HE: A taxa mensal, anualizada, de rentabilidade de uma carteira Naïve ( $R_B$ ) é estatisticamente igual à taxa mensal, anualizada, de rentabilidade do Índice de Mercado (AEX-25) ( $R_D$ ).

HF: A taxa mensal, anualizada, de rentabilidade de uma carteira de Variância Mínima ( $R_C$ ) é estatisticamente igual à taxa mensal, anualizada, de rentabilidade do Índice de Mercado (AEX-25) ( $R_D$ ).

HG: A performance, calculada através do Índice de Sharpe, de uma carteira ótima ( $SH_A$ ) é estatisticamente igual à performance obtida por uma carteira Naïve ( $SH_B$ ).

HH: A performance, calculada através do Índice de Sharpe, de uma carteira ótima ( $SH_A$ ) é estatisticamente igual à performance obtida por uma carteira de Variância Mínima ( $SH_C$ ).

HI: A performance, calculada através do Índice de Sharpe, de uma carteira ótima ( $SH_A$ ) é estatisticamente igual à performance obtida pelo Índice de Mercado (AEX-25) ( $SH_D$ ).

HJ: A performance, calculada através do Índice de Sharpe, de uma carteira Naïve ( $SH_B$ ) é estatisticamente igual à performance obtida por uma carteira de Variância Mínima ( $SH_C$ ).

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

HK: A performance, calculada através do Índice de Sharpe, de uma carteira Naïve ( $SH_B$ ) é estatisticamente igual à performance obtida pelo Índice de Mercado (AEX-25) ( $SH_D$ ).

HL: A performance, calculada através do Índice de Sharpe, de uma carteira de Variância Mínima ( $SH_C$ ) é estatisticamente igual à performance obtida pelo Índice de Mercado (AEX-25) ( $SH_D$ ).

De forma muito resumida deve referir-se que o uso das hipóteses, atrás mencionadas, assim como os testes que se farão às mesmas servirá para se concluir sobre qual dos modelos de gestão de carteiras deve recair a escolha de um investidor que tenha como fim utilizar o índice Holandês – AEX 25 – para investir o seu capital.

#### 4. Metodologia e Dados

Para a realização deste estudo será necessário que passemos por várias fases. Uma dessas primeiras fases consiste na recolha de dados, que depois de trabalhados, serão analisados e nos ajudarão a retirar algumas conclusões. Serão objecto de observação, todos os títulos – que tenham estado a cotar, ininterruptamente, durante o período em análise – do índice de acções Holandês (AEX -25). O período será o compreendido entre o dia 31 de Dezembro de 2002 a 31 de Dezembro de 2012. Dos 25 títulos que representam o AEX-25 só serão usados 13 pois, como atrás referido, só interessam os títulos que tenham cotado ininterruptamente durante o período de análise. Para a recolha dos dados recorreremos à base de dados *Datastream*, de onde extraímos o preço de fecho dos títulos (cotação de fecho).

A partir dos dados recolhidos iremos computar as rendibilidades, o risco associado a cada título (desvio-padrão) e o nível de associação entre os vários títulos (covariâncias). As fórmulas de cálculo utilizadas para a concretização do acima explanado foram as seguintes:

Para o cálculo das rendibilidades,

$$r_{it} = \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$$

Sendo:

- $r_{it}$  a rendibilidade diária do título i, no momento t;
- $P_{t-1}$  a cotação do título no dia anterior;

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

A rendibilidade média anualizada é calculada através de:

$$\bar{r}_i = \frac{\sum_{t=1}^N r_{i,t}}{N} * N$$

Sendo:

- $r_i$  a rendibilidade diária;
- $N$  o número de sessões em que a bolsa funciona, por ano.

Para o cálculo do desvio-padrão:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (r_{i,t} - \bar{r}_i)^2}{N-1}} * \sqrt{N}$$

Para se obter a covariância entre dois títulos 1 e 2 utilizaremos a seguinte formula:

$$COV_d(1,2) = \sum_{j=1}^N \frac{(r_{1,t} - \bar{r}_1)(r_{2,t} - \bar{r}_2)}{N} * N$$

No que respeita ao cálculo das ponderações da carteira ótima, será seguido o modelo média-variância de Markowitz sem *short-selling*. Isto acontece porque, como já referido anteriormente, a grande parte dos investidores não recorrem a esta forma de financiamento para investirem em acções (Elton *et al.*, 2011). De referir também, que em muitos países, principalmente países europeus a legislação e os reguladores não permitem vendas a descoberto.

Com isto, o modelo que utilizaremos será o abaixo indicado:

$$Max \theta = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i (\bar{R}_i - R_f)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j \sigma_{ij}}}$$

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1$$

$$X_i \geq 0 \quad \forall i$$

No que diz respeito à carteira de variância mínima o modelo utilizado será o seguinte:

$$\min \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N X_i X_j \sigma_{ij}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1$$

$$X_i \geq 0 \quad \forall i$$

O processo de cálculo das ponderações da carteira de Markowitz e da carteira de variância mínima passaram pelas seguintes etapas:

- utilizámos, para o cálculo das rendibilidades, risco e correlações entre os vários títulos, “janelas de dados” a 1 e 2 anos;
- calculámos as rendibilidades, risco e covariâncias entre os vários títulos;
- determinámos as ponderações da carteira de Markowitz e de variância mínima a partir dos *inputs*;
- usou-se o método da “janela de dados”, incluindo o período posterior e retirando o primeiro período.



## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

A metodologia do cálculo da composição da carteira ótima será feita com base no modelo proposto por Kwan (2001). Neste trabalho o autor apresenta-nos uma metodologia para o cálculo do modelo de Markowitz através do programa MS Excel. Obteve-se, para o horizonte temporal em análise, 120 observações das 13 acções pertencentes ao Índice Holandês, para as “janelas de dados” a 1 e 2 anos. Para o cálculo da carteira de Mínima Variância foi utilizado o mesmo *software*. No entanto, teve de se alterar as células de entrada aquando da utilização da função *Solver* – para a obtenção da carteira ótima a célula objectivo era a que maximização do Índice de Sharpe, para a obtenção da carteira de Mínima Variância essa célula objectivo passou a ser a minimização do desvio padrão.

Para a taxa de rendibilidade sem risco optou-se pela Euribor a 1 mês, uma vez que esta taxa de juro parece representar uma *proxy* razoável da taxa de investimento em activos sem risco, mais próxima dos bilhetes do tesouro - activo sem risco apontado pelos autores Bodie *et al.* (2009).

A carteira Naïve – carteira de pesos iguais – gerida de forma passiva será constituída por 13 títulos com ponderações iguais. Logo, cada título terá um peso na carteira de aproximadamente 7,69%. Esta carteira manter-se-á, ao longo do tempo, inalterada. O Índice de Sharpe será utilizado para se avaliar a performance das carteiras em estudo, esta escolha ocorre porque este índice é uma referência assídua da bibliografia sobre o tema em análise.

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

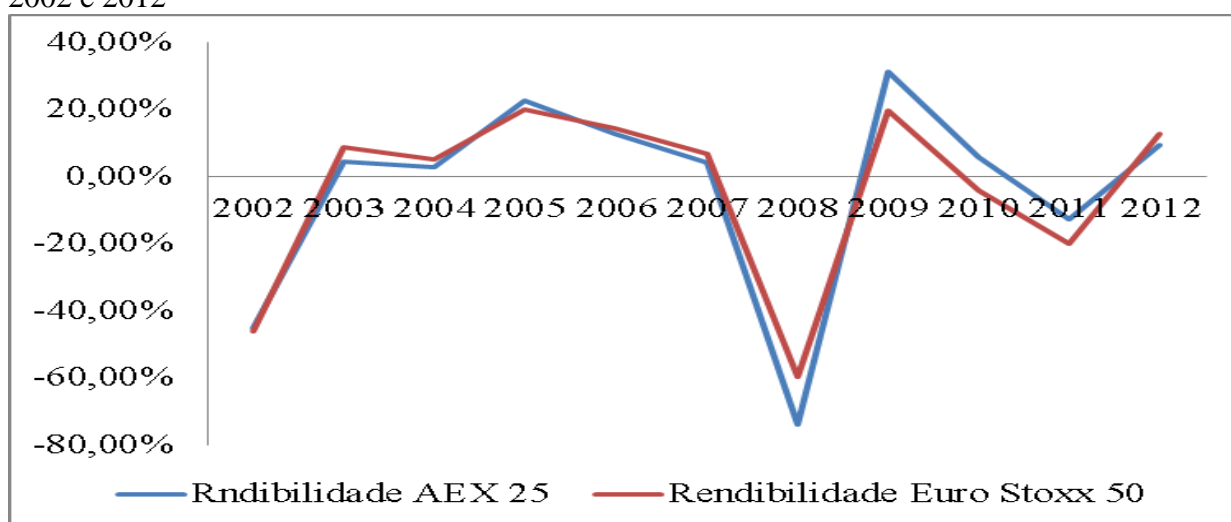
Por fim, serão realizados testes de hipóteses para cada uma das “janelas de dados”, 1 e 2 anos, no sentido de se compreender se existe uma diferença substancial entre gerir uma carteira de forma activa e gerir uma carteira de forma passiva e com qual das formas conseguimos atingir uma melhor *performance*. Posteriormente comparar-se-á o desempenho das três carteiras, atrás mencionadas, com o desempenho do *benchmark*, que no nosso caso é o próprio índice – o objectivo do investidor será sempre ter uma *performance* acima da do *benchmark* (AEX-25).

## 5. Resultados

### 5.1 Carteiras em análise - Resultados

Antes de analisarmos os resultados obtidos pelas carteiras em estudo, será importante observar a forma como se comportou o índice Holandês durante o horizonte temporal em análise (2002-2012).

**Figura 1** – Comparação das rendibilidades do índice AEX 25 e Euro Stoxx 50 entre 2002 e 2012



A figura acima expressa a evolução da rendibilidade do índice AEX-25 e do Euro Stoxx 50 entre 2002 e 2012. Pode observar-se que o comportamento de ambos os índices foi bastante oscilante e sem uma tendência definida. Nota-se uma subida substancial entre 2002 e 2005 fruto da retoma que os mercados registaram após recuperarem da bolha das *dot com*<sup>4</sup>, que “acabou” em 2001. Assim, podemos dizer que a subida registada entre os anos de 2002 e 2005 se deve a uma recuperação económica que surge depois do rebentamento da bolha acima enunciada. Entre 2007 e 2008 há uma queda muito

<sup>4</sup> A bolha das *dotcom* teve início por meados da década de 1990 nos Estados Unidos da América e foi caracterizada, essencialmente, pela subida generalizada dos títulos accionistas das empresas tecnológicas cotadas nos principais índices norte-americanos. Esta foi baseada numa forte especulação e sobrevalorização das empresas tecnológicas e de internet. A bolha das *dotcom* rebenta por volta do ano de 2001.

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

acentuada da rendibilidade do índice, devido ao facto de durante este período se ter iniciado a crise do *subprime*<sup>5</sup> nos EUA. Devido há existência de uma forte correlação entre o desempenho das principais praças europeias com as principais praças norte-americanas, a queda das rendibilidades, atrás mencionada, não é de estranhar devido ao rápido alastramento desta crise a alguns países europeus. Em 2009 assiste-se a uma recuperação da rendibilidade do índice porque os mercados começaram a acreditar que a crise do *subprime* estava, aos poucos, a ser ultrapassada. No entanto, isso não tinha ainda acontecido e verifica-se um recuo do índice, entre 2010 e 2011. Este retrocesso na recuperação do índice está relacionado com a entrada de ajuda financeira em países como Portugal, Irlanda, Grécia e Espanha e que, apesar de não afectar directamente o índice Holandês, fez com que os investidores se retraíssem nos investimentos, principalmente, do mercado accionista refugiando-se em títulos mais defensivos e menos expostos ao contexto económico vivido na altura. Exemplos destes títulos são as obrigações do tesouro. No final do período em análise, já começamos a observar alguma recuperação do índice. Esta recuperação pode dever-se ao facto dos investidores, que antes estavam refugiados em títulos mais seguros, verem os prémios pagos por deterem esses mesmos títulos serem reduzidos, fruto da recuperação económica, voltando a entrar no mercado accionista na esperança de obterem rendibilidades mais interessantes.

Na óptica de resultados obtidos, tendo em conta a uso dos modelos média-variância e mínima variância (figuras 8 e 9 em anexo) observamos que, quer para a janela de dados a 1 ano como para a janela de dados a 2 anos, ambos os modelos têm melhores resultados em termos de rendibilidades face ao modelo naïve. No que respeita ao rácio de sharpe, as conclusões anteriores são idênticas. Isto significa que tanto a carteira

---

<sup>5</sup> Podemos entender o *subprime* como a atribuição de um crédito hipotecário no sector imobiliário destinado a indivíduos que apresentavam um elevado risco de incumprimento.

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

ótima de Markowitz como a carteira de variância mínima apresentam um melhor desempenho face à carteira naïve.

Relativamente ao nível diversificação observamos que quando consideramos a janela de dados a 1 ano e a carteira de Markowitz, o número de títulos investidos é, em média, 3 títulos enquanto para a carteira de variância mínima o número de títulos a investir é, em média, 5 títulos. Considerando isto apenas investimos em 23% dos títulos disponíveis quando usamos o modelo da carteira ótima e 38% quando estamos perante o modelo de variância mínima. Gaumnitz (1969) é um dos autores que refere que a diversificação ajuda a reduzir o risco o que por conseguinte minimiza as perdas, fazendo com que os níveis de rendibilidade aumentem. Neste caso em concreto verifica-se que em momentos de crise o número de acções a investir sofre uma redução brusca, havendo momentos em que se investe a totalidade do capital numa única acção. Este facto vem contrariar a teoria acima apresentada. A redução de títulos a investir verifica-se também quando o modelo utilizado é o de variância mínima mas em menor escala.

Desta forma concluímos que para o período em análise e tendo em conta as restrições descritas ao longo do trabalho e o horizonte temporal em estudo, a carteira de Markowitz aparenta ser a melhor opção de investimento tendo em conta o binómio rendibilidade/risco. Pode afirmar-se que não existem evidências estatísticas de que haja diferenças entre a janela de dados a 1 ano e a janela de dados a 2 anos. Na secção seguinte analisaremos os testes de hipóteses de forma a confirmar se os resultados obtidos são ou não estatisticamente significativos e qual dos modelos estudados apresenta melhor nível de rendibilidade e Índice de Sharpe.

## 5.2 Resultados dos Testes de Hipóteses

### 5.2.1 Teste de Normalidade

A tabela 1 apresenta o teste estatístico Kolmogorov-Smirnov, realizado a partir da utilização do SPSS e que tem por objectivo avaliar a normalidade dos resultados obtidos, ou seja identificar em que medida os dados observados são modelados por uma distribuição normal.

**Tabela 1** - Teste de Kolmogorov-Smirnov

1 Ano	Tests of Normality							
	Kolmogorov-Smirnov			Shapiro-Wilk			Assimetria	Curtose
	Estatística	df	Sig.	Estatística	df	Sig.		
Rend. Carteira óptima	0,09	120	0,019	0,928	120	0	-1,018	5,767
Rend. Variância Mínima	0,123	120	0	0,914	120	0	-0,913	0,197
Rend. Naïve	0,120	120	0	0,929	120	0	-0,926	0,409
SR. Carteira Óptima	0,067	120	0,200	0,982	120	0,100	-0,055	-0,845
SR. Variância Mínima	0,061	120	0,200	0,988	120	0,382	-0,179	0,447
SR. Naïve	0,050	120	0,200	0,982	120	0,114	-0,041	-0,84

Com este teste pretendemos testar duas hipóteses:

- hipótese nula - a distribuição das rendibilidades e do Índice de Sharpe segue uma distribuição normal;
- hipótese alternativa - a distribuição das rendibilidades e do Índice de Sharpe não segue uma distribuição normal.

Pela observação da tabela verifica-se a existência de várias estatísticas cujo valor-p é menor a 0,05 o que significa que algumas populações alvo do estudo não podem ser consideradas aproximadas à distribuição normal. Desta forma, não se pode garantir a

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

normalidade da diferença de populações entre duas populações não normais. Assim, para testar os testes de hipóteses será utilizado o teste não paramétrico de Wilcoxon.

### 5.2.2 Teste de Hipóteses

Os testes de hipóteses que serão apresentados servirão para entender de que forma se comportam estatisticamente as carteiras de investimento analisadas ao longo do estudo. Como foi já referido, para os testes de hipóteses utilizámos o método das “janelas de dados” a 1 e 2 anos. Com base na análise da tabela 2 podemos concluir que as hipóteses, a 12 meses, nos sugerem que existem evidências estatísticas de diferenças entre a carteira ótima, a carteira variância mínima e a carteira naïve, quer ao nível da rentabilidade quer ao nível do Índice de Sharpe. Esta conclusão acompanha o explanado na revisão de literatura.

**Tabela 2** - Teste de Hipótese ano com janela de dados a 1 ano Markowitz vs Variância Mínima a 12 meses

Hipótese	Hipót. Nula	Hipót. Alternativa	t obs	t $\alpha/2$	Valor-p	Observação
H1A	$H_0: R_A = R_B$	$H_1: R_A \neq R_B$	9,947151	2,069	7,7948E-07	Rejeitamos H0
H2A	$H_0: R_A = R_C$	$H_1: R_A \neq R_C$	4,808392	2,069	0,000545946	Rejeitamos H0
H3A	$H_0: R_B = R_C$	$H_1: R_B \neq R_C$	5,454366	2,069	0,000199515	Rejeitamos H0
H4A	$H_0: R_A = R_B$	$H_1: R_A \neq R_B$	17,61286	2,069	2,08005E-09	Rejeitamos H0
H5A	$H_0: SH_A = SH_B$	$H_1: SH_A \neq SH_B$	8,270355	2,069	4,7557E-06	Rejeitamos H0
H6A	$H_0: SH_A = SH_C$	$H_1: SH_A \neq SH_C$	13,58657	2,069	3,21498E-08	Rejeitamos H0
H7A	$H_0: SH_A = SH_D$	$H_1: SH_A \neq SH_D$	2,860527	2,069	0,015502012	Rejeitamos H0
H8A	$H_0: SH_B = SH_C$	$H_1: SH_B \neq SH_C$	5,621262	2,069	0,000155312	Rejeitamos H0
H9A	$H_0: SH_B = SH_D$	$H_1: SH_B \neq SH_D$	19,53165	2,069	6,89019E-10	Rejeitamos H0
H10A	$H_0: SH_C = SH_D$	$H_1: SH_C \neq SH_D$	8,295419	2,069	4,61961E-06	Rejeitamos H0

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

**Tabela 3** - Teste de Hipótese ano com janela de dados a 2 anos Markowitz vs Variância Mínima a 12 meses

Hipótese	Hipót. Nula	Hipót. Alternativa	t obs	t $\alpha/2$	Valor-p	Observação
H1AA	$H_0: R_A = R_B$	$H_1: R_A \neq R_B$	6,85936	2,069	2,73016E-05	Rejeitamos H0
H2AA	$H_0: R_A = R_C$	$H_1: R_A \neq R_C$	4,578309	2,069	0,000792529	Rejeitamos H0
H3AA	$H_0: R_B = R_C$	$H_1: R_B \neq R_C$	4,423579	2,069	0,001022435	Rejeitamos H0
H4AA	$H_0: R_A = R_B$	$H_1: R_A \neq R_B$	8,13509	2,069	5,56876E-06	Rejeitamos H0
H5AA	$H_0: SH_A = SH_B$	$H_1: SH_A \neq SH_B$	11,31004	2,069	2,1329E-07	Rejeitamos H0
H6AA	$H_0: SH_A = SH_C$	$H_1: SH_A \neq SH_C$	11,83423	2,069	1,34192E-07	Rejeitamos H0
H7AA	$H_0: SH_A = SH_D$	$H_1: SH_A \neq SH_D$	5,508374	2,069	0,000183904	Rejeitamos H0
H8AA	$H_0: SH_B = SH_C$	$H_1: SH_B \neq SH_C$	9,69888	2,069	1,00261E-06	Rejeitamos H0
H9AA	$H_0: SH_B = SH_D$	$H_1: SH_B \neq SH_D$	10,43953	2,069	4,80214E-07	Rejeitamos H0
H10AA	$H_0: SH_C = SH_D$	$H_1: SH_C \neq SH_D$	13,44931	2,069	3,57391E-08	Rejeitamos H0

De notar que todos os testes foram feitos com base no sistema de “janelas de dados” a 1 e 2 anos mas parece não haver diferença entre a utilização de “janelas de dados” a 1 ano e a utilização de “janelas de dados” a 2 anos (Tabelas 2 e 3). Quando as hipóteses são testadas para períodos de base mensal as conclusões não se alteram.

Assim, um investidor que tenha como fim investir o seu capital, através de uma carteira de acções composta por títulos do índice AEX – 25, poderá escolher qualquer dos modelos apresentados visto que para o estudo em causa, aparentemente, não existem diferenças significativas quer em termos de rendibilidade, quer de índice de Sharpe que façam o investidor optar peremptoriamente apenas por um dos modelos apresentados.



## **6. Conclusões, limitações e tópicos de Investigação futura**

### ***6.1 Principais Conclusões***

Esta dissertação teve por objectivo estudar de que forma os modelos de Markowitz, variância mínima e naïve, utilizados na gestão de carteiras, afectam a performance de uma carteira de investimento. Para tal, recorreu-se à observação dos dados históricos (10 anos) do índice AEX-25 e analisou-se quais as diferenças existentes entre a utilização de diversos modelos e qual o impacto dessas diferenças no desempenho da carteira de investimento, constituída apenas por acções, em termos de *performance* e de Índice de Sharpe. O segundo objectivo desta dissertação foi observar se a utilização de diferentes janelas de dados tem um impacto estatisticamente significativo no estudo em análise.

Relativamente ao primeiro objectivo podemos concluir, tendo por base os resultados obtidos, que não existem diferenças estatisticamente significativas na utilização dos diferentes modelos apresentados.

Em termos de rendibilidades obtidas, a carteira óptima como era de esperar visto que a mesma tem por base a maximização do binómio rendibilidade/risco, apresenta um desempenho consistente em certos momentos do horizonte temporal em análise. O risco associado a esta carteira poderá ter sido mais elevado, face aos outros modelos utilizados, devido ao período económico conturbado vivido na altura do estudo.

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

No que respeita ao modelo de variância mínima, que dá ênfase ao menor risco em detrimento da rendibilidade, este poderia ter sido utilizado como um investimento mais defensivo para o período observado, considerando que foi um período de elevada volatilidade.

Segundo Uppal *et al.* (2009) as carteiras que têm por base os modelos de média-variância e mínima variância são consideravelmente afectadas no cálculo dos pesos óptimos, pelos erros de estimação que advém das rendibilidades, variâncias e covariâncias dos títulos em análise. Ainda assim, o desempenho das carteiras optimizadas através destes dois modelos não verificou uma melhoria considerável aquando do aumento da “janela de dados” a 1 ano para a “janela de dados” a 2 anos, isto é, aliás suportado nos teste estatísticos efectuados. O período em análise foi no entanto, um período em que a economia foi negativamente marcada pela crise do *subprime*. Esta crise poderá ser explicação mais plausível para a má performance dos títulos em muitos momentos da análise.

Considerando os testes elaborados para um nível de significância de 5%, pode concluir-se que os resultados observados vão ao encontro das conclusões obtidas.

O estudo deste tema poderá ser aprofundado através da análise do mix dos modelos de gestão de carteiras disponíveis adaptando os mesmos aos momentos económicos e às preferências dos investidores.

## ***6.2 Limitações do estudo***

As principais limitações deste estudo são as seguintes:

- A questão do horizonte temporal, abordada durante a dissertação. Ou seja, a utilização do histórico das cotações dos títulos de apenas 10 anos não nos possibilita uma análise mais profunda e consistente em comparação com outros estudos que apresentam um histórico mais alargado;
- A constante saída e entrada dos títulos dos índices não é benéfica para o estudo, uma vez que se torna limitativo trabalhar com menos de metade dos títulos que fazem parte do índice;
- Poder-se-iam ter utilizados outros modelos de optimização de carteiras e as conclusões poderiam ser diferentes. Assim como se poderia ter utilizado outra medida de desempenho, que não o Índice de Sharpe, como por exemplo os índices de Treynor ou de Jensen;

## ***6.3 Tópicos para futuras investigações***

Como tópicos para investigação futura podemos sugerir os seguintes:

- Seria importante considerar os efeitos dos custos de transacção quer nas rendibilidades quer no Índice de Sharpe;
- Considerar o método de “janelas de dados” para períodos mais extensos que 1 e 2 anos;
- Alargar o horizonte temporal do estudo e fazer uma análise aprofundada dos eventos que podem contribuir para a existência de grandes oscilações nas rendibilidades e risco dos títulos;

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

- Verificar como se comportam as carteiras de investimento de títulos europeus em mercados do Sul vs. mercados do Norte da Europa e ver de que forma é que a localização geográfica pode influenciar a performance e a rendibilidade.

## 7. Referências Bibliográficas

1. Baule, R. (2010), ‘‘Optimal portfolio selection for the small investor considering risk and transaction costs’’, *OR Spectrum*, Vol. 32, No. 1, pp. 61-76.
2. Bawa V. (1986), ‘‘Admissible portfolios for all individuals’’, *Journal of Finance*, Vol. 31, No 4, pp. 1169-1181.
3. Bodie, Z., Kane, A. and Markus, A. (2009), ‘‘Investments’’, eighth edition, The MacGraw Hill Companies.
4. Chow, G., Jacquier, E., Kritzman, M. and Lowry, K. (1999), ‘‘ Optimal Portfolio In Good Times and Bad’’, *Financial Analysis Journal*, Vol. 55, No. 3, pp. 65-73.
5. Clarke, R., de Silva, H. and Thorley, S. (2006), ‘‘Minimum-Variance Portfolio in the U.S. Equity Market’’, *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 33, No. 1, pp. 10-24.
6. De Miguel, V. and Garlappi, L. and Uppal, R., (2009), ‘‘Optimal Versus Naïve Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy?’’, *Review of Financial Studies*, Vol. 22, No. 5, pp. 1915-1953.
7. Elton, E., Grubber, M., Brown, S. and Goetzmann, W. (2011), ‘‘Modern Portfolio Theory and Investment Analysis’’, Eighth Edition, *John Willey & Sons*, New York.
8. Gaumnitz, J. E. (1969), ‘‘Risk, return and equilibrium’’, unpublished paper, *Graduate School of Business, The University of Chicago*, March.
9. Gunthorpe, D. and Levy, H. (1994), ‘‘Portfolio Composition and the Investment Horizon’’, *Financial Analysts Journal*, Vol. 50, No.1, pp. 51-56.

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

10. Horasanli, M. and Fidan, N. (2007), ‘‘Portfolio Selection by Using Time Varying Covariance Matrices’’, *Journal of Economics & Social Research*, Vol.9, No. 2, pp. 1-22.
11. Jensen, M. J. (1968) ‘‘The performance of mutual funds in the period 1945-1964’’, *Journal of Finance*, Vol. 23, No. 2, pp. 389-416.
12. Jorion, P. (1986), ‘‘Bayes-Stein estimation for portfolio analysis’’. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 21, No. 3, pp.279-292.
13. Kwan, C. C. Y. (2001), ‘‘Portfolio analysis using spreadsheets tools’’, *Journal of Applied Finance*, Vol. 11, pp. 70-81.
14. Kritzman, M. Page, S. Turkington, D. (2010), ‘‘In Defense of Optimization: The Fallacy on 1/N’’, *Financial Analysts Journal*, Vol. 66, No. 2, pp. 1-9.
15. Markowitz, H. (1952), ‘‘Portfolio selection’’, *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.
16. Markowitz, H. (2010), ‘‘Portfolio Theory: As I still see it’’, *Annual Review of Financial Economic*, Vol. 2, pp. 1-23.
17. Modigliani, F. and Modigliani, L. (1997), ‘‘Risk-adjusted performance’’, *Journal of Portfolio Management*, Vol. 23, No. 2, pp. 45-54.
18. Pogue, G.A. (1970), ‘‘An extension of the Markowitz portfolio selection model to include variable transaction costs, short sales, leverage policies and taxes’’, *The Journal of Finance*, Vol. 25, No. 5, pp. 1005-1027.
19. Polson, N. and Tew, B. (2000), ‘‘Bayesian Portfolio Selection: An Empirical Analysis of the S&P 500 Index 1970-1996’’, *Journal of Business & Economics Statistics*, Vol. 18, No.2, pp. 164-173.

## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

20. Rubinstein, M. (2002), “Markowitz’s “Portfolio Selection”: A Fifty-Year Retrospective”, *The Journal of Finance*, Vol. 57, No. 3, pp. 1041-1045.
21. Sharpe, W. F. (1966), “Mutual fund performance”, *Journal of Business*, Vol. 39, No.1, pp. 49-58.
22. Statman, M. (1987), “How many stocks make a diversified portfolio?”, *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, Vol. 22, No. 3, pp. 353-363.
23. Statman, M. (2004), “The Diversification Puzzle”, *Financial Analysts Journal*, Vol. 60, No. 4, pp. 44-53.
24. Shefrin, H. and Statman, M. (2000), “Behavioral portfolio theory”, *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, Vol. 35, No. 2, pp. 127-151.
25. Treynor, J. L. (1966), “How to rate management investment funds”, *Harvard Business Review*, Vol. 43, No.1, pp.63-75.
26. Treynor, J. L. and Mazuy, K. (1966), “Can mutual funds outguess the market?”, *Harvard Business Review*, Vol. 44, No. 4, pp. 131-136.

A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada  
ao índice AEX -25

## 8. ANEXOS

**Tabela 4** - Teste de Hipótese ano com janela de dados a 1 ano Markowitz vs Naïve a 12 meses

Hipótese	Hipót. Nula	Hipót. Alternativa	t obs	t $\alpha/2$	Valor-p	Observação
H1B	$H_0: R_A = R_B$	$H_1: R_A \neq R_B$	9,469469	2,069	1,27111E-06	Rejeitamos H0
H2B	$H_0: R_A = R_C$	$H_1: R_A \neq R_C$	5,256088	2,069	0,000270041	Rejeitamos H0
H3B	$H_0: R_B = R_C$	$H_1: R_B \neq R_C$	5,727686	2,069	0,000132658	Rejeitamos H0
H4B	$H_0: R_A = R_B$	$H_1: R_A \neq R_B$	9,542035	2,069	1,17861E-06	Rejeitamos H0
H5B	$H_0: SH_A = SH_B$	$H_1: SH_A \neq SH_B$	15,95024	2,069	5,96016E-09	Rejeitamos H0
H6B	$H_0: SH_A = SH_C$	$H_1: SH_A \neq SH_C$	9,642871	2,069	1,06196E-06	Rejeitamos H0
H7B	$H_0: SH_A = SH_D$	$H_1: SH_A \neq SH_D$	4,55122	2,069	0,000828477	Rejeitamos H0
H8B	$H_0: SH_B = SH_C$	$H_1: SH_B \neq SH_C$	10,60263	2,069	4,10733E-07	Rejeitamos H0
H9B	$H_0: SH_B = SH_D$	$H_1: SH_B \neq SH_D$	11,27761	2,069	2,19626E-07	Rejeitamos H0
H10B	$H_0: SH_C = SH_D$	$H_1: SH_C \neq SH_D$	10,77403	2,069	3,49275E-07	Rejeitamos H0

**Tabela 5** - Teste de Hipótese ano com janela de dados a 1 ano Mínima Variância vs Naïve a 12 meses

Hipótese	Hipót. Nula	Hipót. Alternativa	t obs	t $\alpha/2$	Valor-p	Observação
H1C	$H_0: R_A = R_B$	$H_1: R_A \neq R_B$	2,583539	2,069	0,025429408	Rejeitamos H0
H2C	$H_0: R_A = R_C$	$H_1: R_A \neq R_C$	-2,13734	2,069	0,055862594	Não Rejeitamos H0
H3C	$H_0: R_B = R_C$	$H_1: R_B \neq R_C$	-3,60317	2,069	0,004146813	Rejeitamos H0
H4C	$H_0: R_A = R_B$	$H_1: R_A \neq R_B$	-7,49075	2,069	1,21391E-05	Rejeitamos H0
H5C	$H_0: SH_A = SH_B$	$H_1: SH_A \neq SH_B$	-1,91192	2,069	0,082272495	Não Rejeitamos H0
H6C	$H_0: SH_A = SH_C$	$H_1: SH_A \neq SH_C$	3,099819	2,069	0,010107407	Rejeitamos H0
H7C	$H_0: SH_A = SH_D$	$H_1: SH_A \neq SH_D$	2,248521	2,069	0,046009058	Rejeitamos H0
H8C	$H_0: SH_B = SH_C$	$H_1: SH_B \neq SH_C$	-3,02104	2,069	0,011633979	Rejeitamos H0
H9C	$H_0: SH_B = SH_D$	$H_1: SH_B \neq SH_D$	1,033301	2,069	0,323646383	Não Rejeitamos H0
H10C	$H_0: SH_C = SH_D$	$H_1: SH_C \neq SH_D$	3,782495	2,069	0,003033923	Rejeitamos H0

**Tabela 6** - Teste de Hipótese ano com janela de dados a 2 anos Markowitz vs Naïve

Hipótese	Hipót. Nula	Hipót. Alternativa	t obs	t $\alpha/2$	Valor-p	Observação
H1BB	$H_0: R_A = R_B$	$H_1: R_A \neq R_B$	8,27253	2,069	4,74372E-06	Rejeitamos H0
H2BB	$H_0: R_A = R_C$	$H_1: R_A \neq R_C$	14,30384	2,069	1,87747E-08	Rejeitamos H0
H3BB	$H_0: R_B = R_C$	$H_1: R_B \neq R_C$	4,821603	2,069	0,000534505	Rejeitamos H0
H4BB	$H_0: R_A = R_B$	$H_1: R_A \neq R_B$	5,657126	2,069	0,000147249	Rejeitamos H0
H5BB	$H_0: SH_A = SH_B$	$H_1: SH_A \neq SH_B$	8,120067	2,069	5,66792E-06	Rejeitamos H0
H6BB	$H_0: SH_A = SH_C$	$H_1: SH_A \neq SH_C$	9,58146	2,069	1,13143E-06	Rejeitamos H0
H7BB	$H_0: SH_A = SH_D$	$H_1: SH_A \neq SH_D$	8,442697	2,069	3,90018E-06	Rejeitamos H0
H8BB	$H_0: SH_B = SH_C$	$H_1: SH_B \neq SH_C$	13,56948	2,069	3,25745E-08	Rejeitamos H0
H9BB	$H_0: SH_B = SH_D$	$H_1: SH_B \neq SH_D$	16,05209	2,069	5,57192E-09	Rejeitamos H0
H10BB	$H_0: SH_C = SH_D$	$H_1: SH_C \neq SH_D$	16,23155	2,069	4,95313E-09	Rejeitamos H0

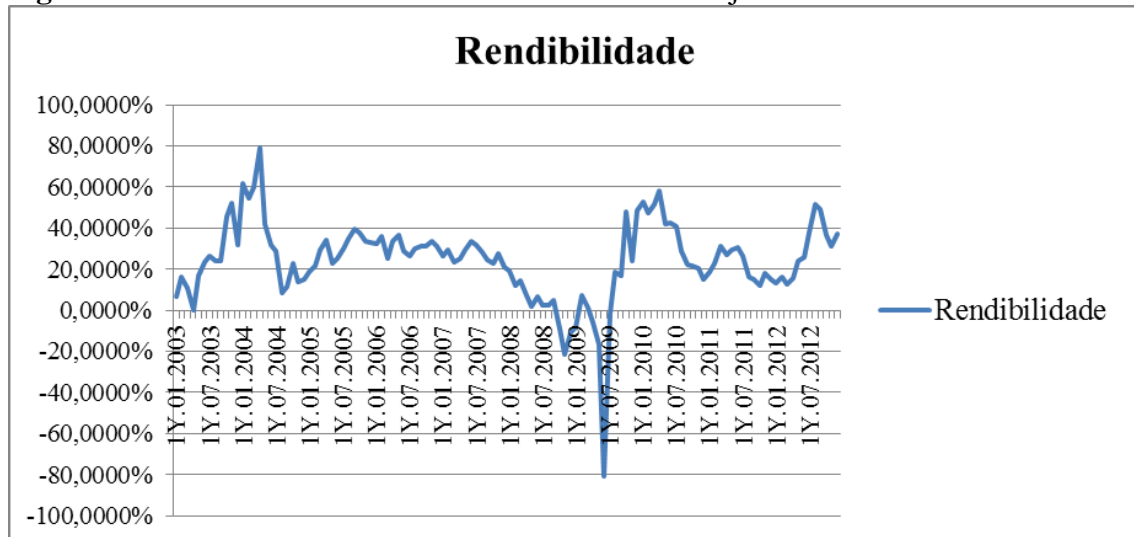


## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

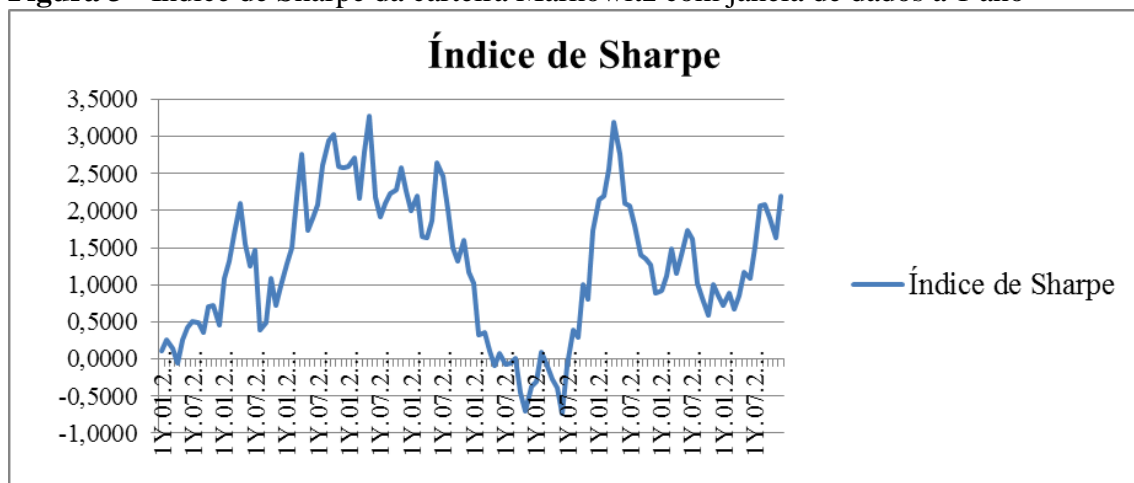
**Tabela 7** - Teste de Hipótese ano com janela de dados a 2 anos Mínima Variância vs Naïve

Hipótese	Hipót. Nula	Hipót. Alternativa	t obs	t a/2	Valor-p	Observação
H1CC	$H_0: R_A = R_B$	$H_1: R_A \neq R_B$	3,144165	2,069	0,009338812	Rejeitamos H0
H2CC	$H_0: R_A = R_C$	$H_1: R_A \neq R_C$	1,958851	2,069	0,07596308	Não Rejeitamos H0
H3CC	$H_0: R_B = R_C$	$H_1: R_B \neq R_C$	-0,85073	2,069	0,413054502	Não Rejeitamos H0
H4CC	$H_0: R_A = R_B$	$H_1: R_A \neq R_B$	-0,22327	2,069	0,827413879	Não Rejeitamos H0
H5CC	$H_0: SH_A = SH_B$	$H_1: SH_A \neq SH_B$	0,867684	2,069	0,404099317	Não Rejeitamos H0
H6CC	$H_0: SH_A = SH_C$	$H_1: SH_A \neq SH_C$	5,678669	2,069	0,000142621	Rejeitamos H0
H7CC	$H_0: SH_A = SH_D$	$H_1: SH_A \neq SH_D$	11,87526	2,069	1,29509E-07	Rejeitamos H0
H8CC	$H_0: SH_B = SH_C$	$H_1: SH_B \neq SH_C$	2,840859	2,069	0,016057174	Rejeitamos H0
H9CC	$H_0: SH_B = SH_D$	$H_1: SH_B \neq SH_D$	-1,1009	2,069	0,294446804	Não Rejeitamos H0
H10CC	$H_0: SH_C = SH_D$	$H_1: SH_C \neq SH_D$	10,70992	2,069	3,71011E-07	Rejeitamos H0

**Figura 2** - Rendibilidade da carteira de Markowitz com janela de dados a 1 ano

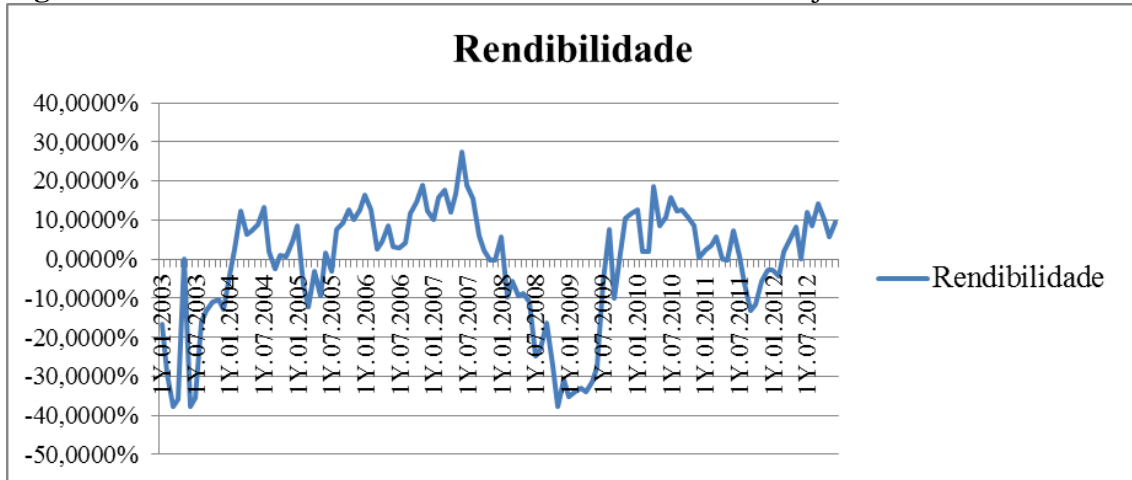


**Figura 3** - Índice de Sharpe da carteira Markowitz com janela de dados a 1 ano

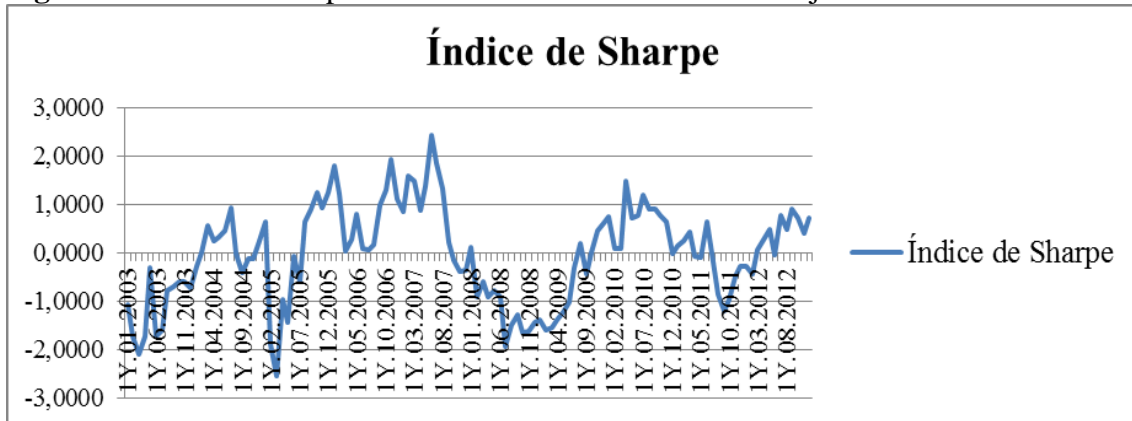


## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

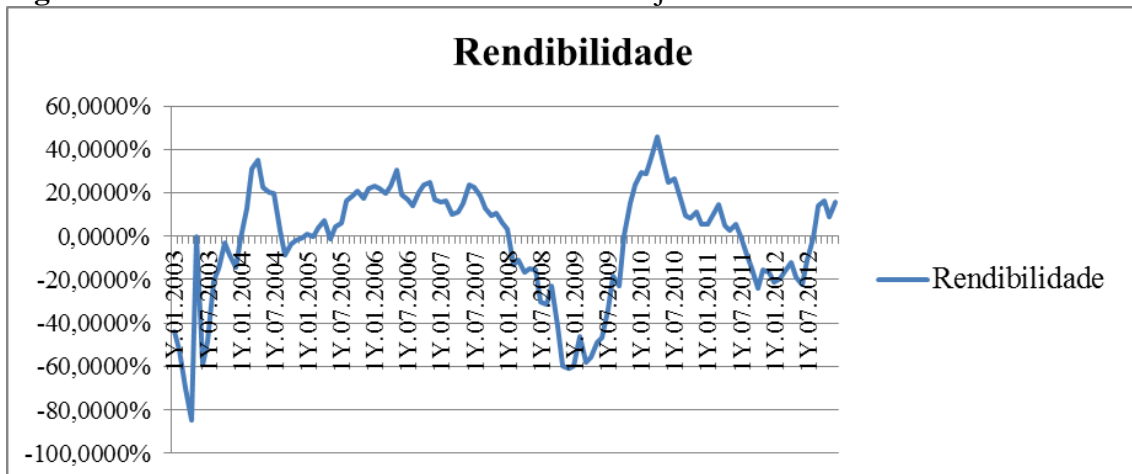
**Figura 4-** Rendibilidade da carteira de Variância Mínima com janela de dados a 1 ano



**Figura 5-** Índice de Sharpe da carteira Variância Mínima com janela de dados a 1 ano

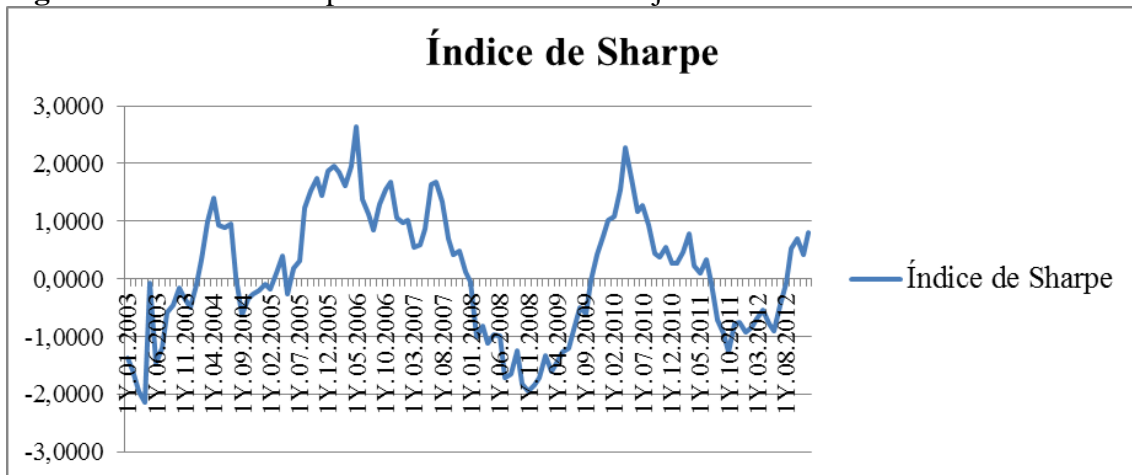


**Figura 6-** Rendibilidade da carteira de Naïve com janela de dados a 1 ano

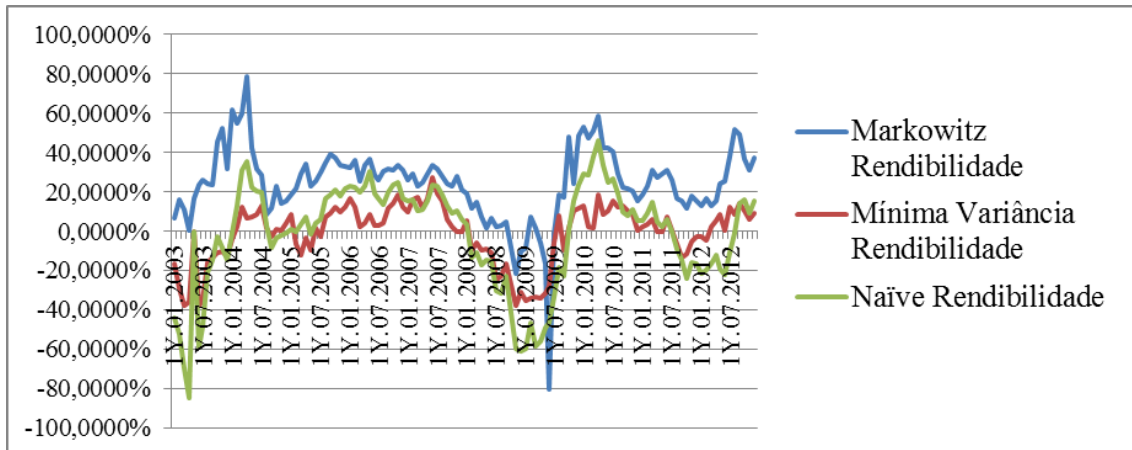


## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

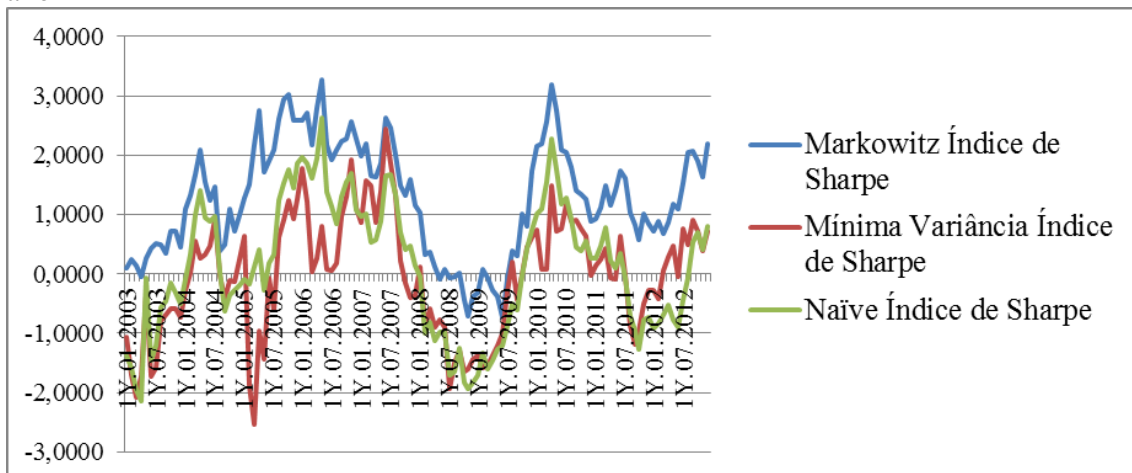
**Figura 7-** Índice de Sharpe da carteira Naïve com janela de dados a 1 ano



**Figura 8 -** Comparação das rendibilidades das várias carteiras para janela de dados a 1 ano

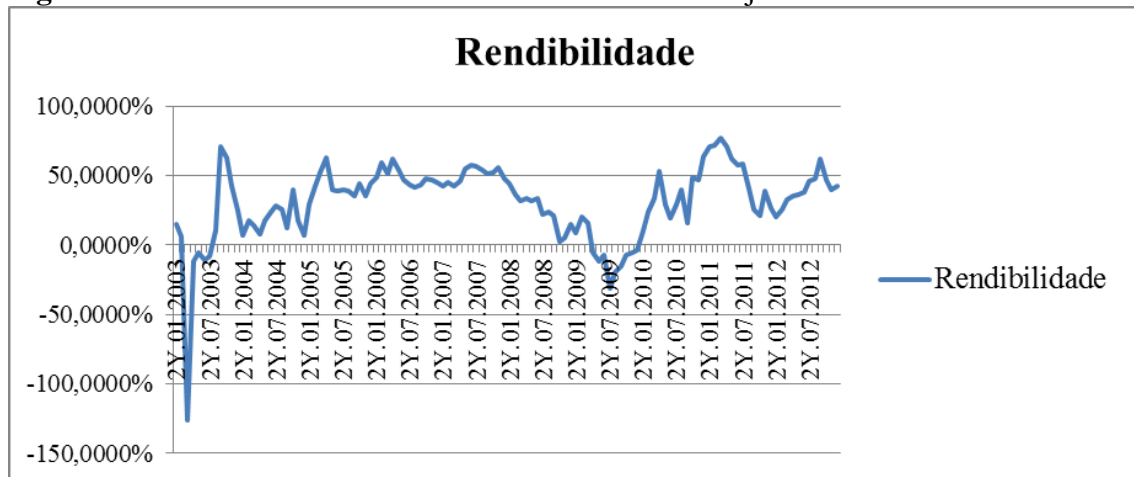


**Figura 9 -** Comparação do Índice de Sharpe das várias carteiras para janela de dados a 1 ano

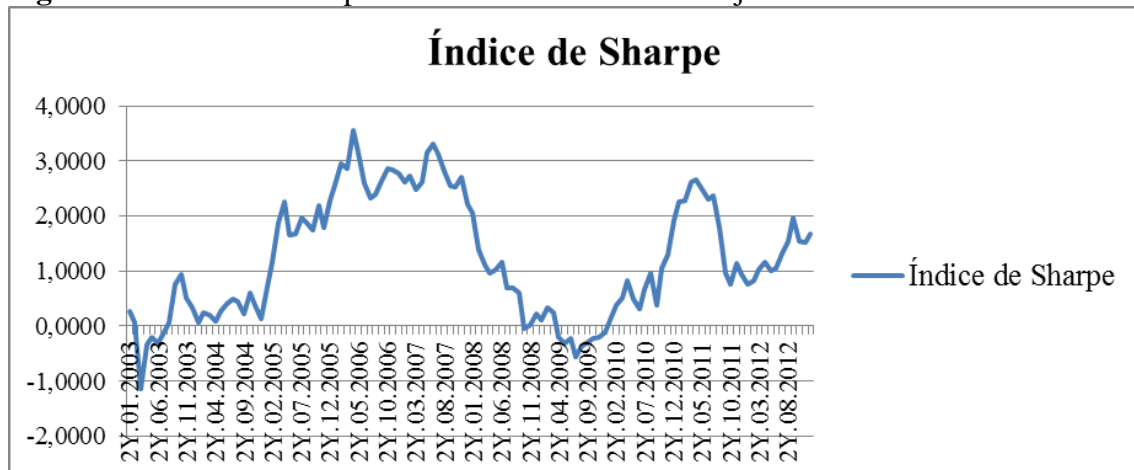


## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

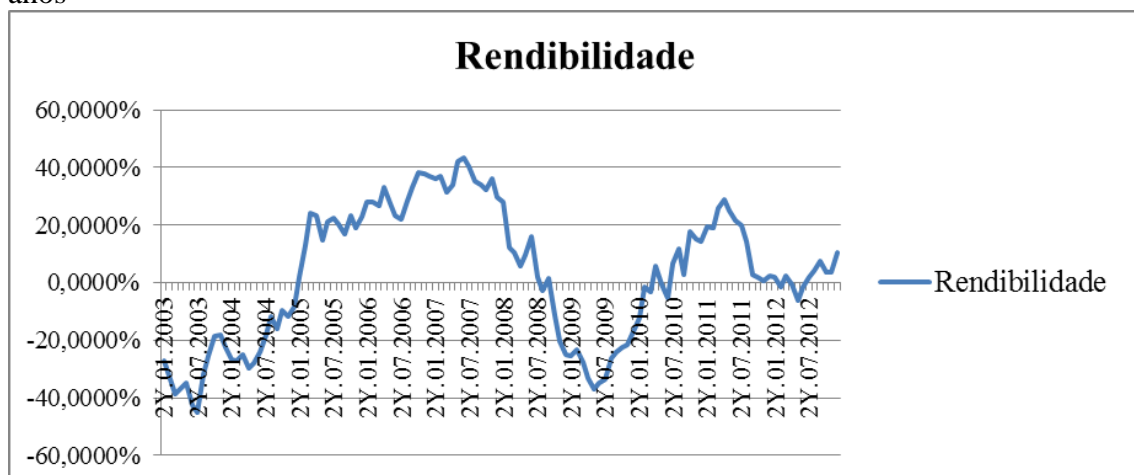
**Figura 10** - Rendibilidade da carteira de Markowitz com janela de dados a 2 anos



**Figura11** - Índice de Sharpe da carteira Markowitz com janela de dados a 2 anos

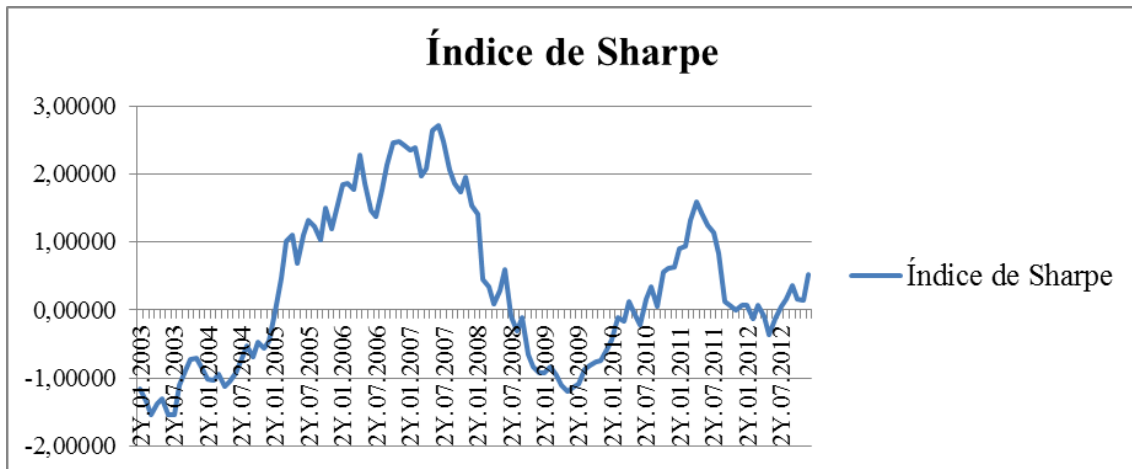


**Figura 12** - Rendibilidade da carteira de Variância Mínima com janela de dados a 2 anos

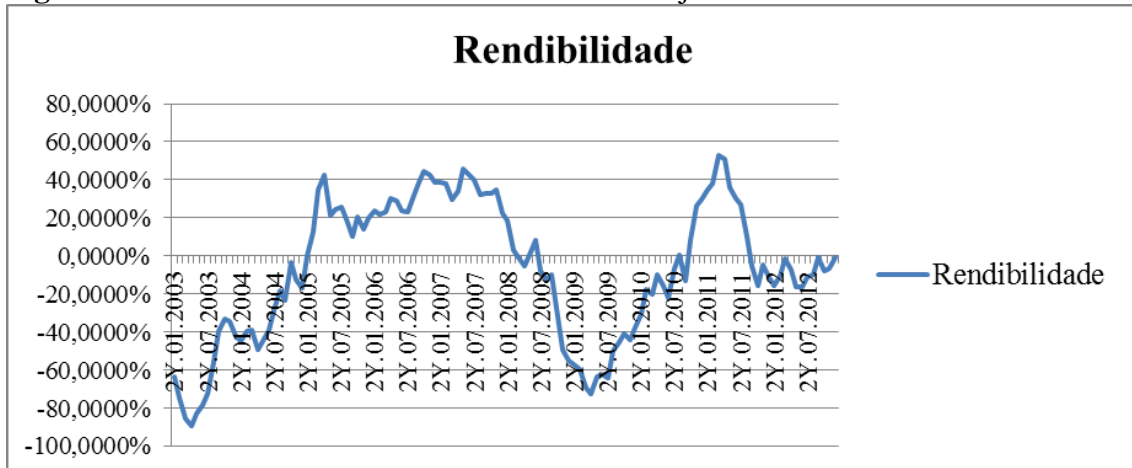


## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

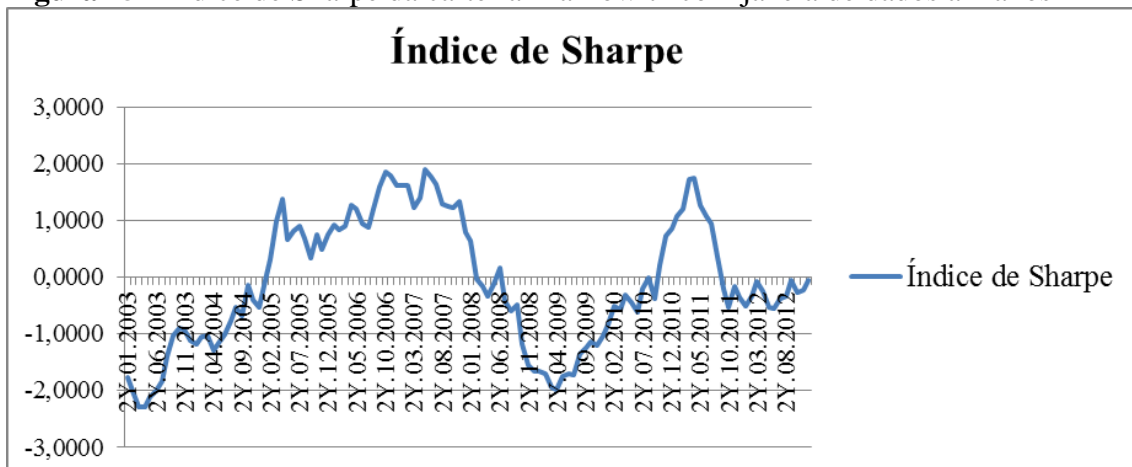
**Figura 13 - Índice de Sharpe da carteira Variância Mínima com janela de dados a 2 anos**



**Figura 14 - Rendibilidade da carteira de Naïve com janela de dados a 2 anos**

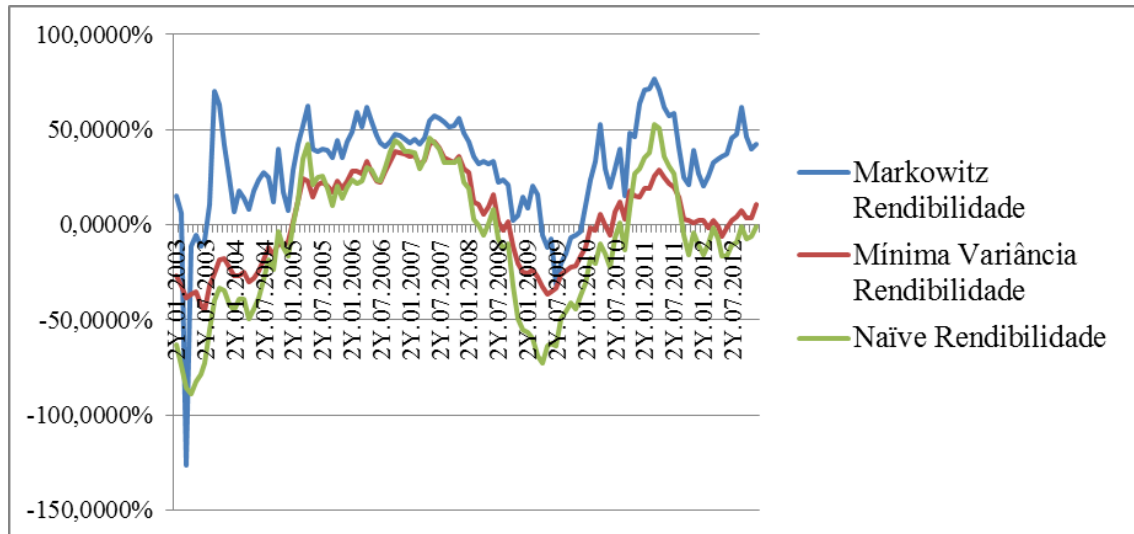


**Figura 15 - Índice de Sharpe da carteira Markowitz com janela de dados a 2 anos**



## A Eficiência das Carteiras Markowitz, Variância Mínima e Naïve aplicada ao índice AEX -25

**Figura 16** - Comparação das rendibilidades das várias carteiras para janela de dados a 2 anos



**Figura 17** - Comparação do Índice de Sharpe das várias carteiras para janela de dados a 2 anos

